KARARSIZ HAL (ZAMANA BAĞLI) ISI İLETİMİ

DR. HÜLYA ÇAKMAK

ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

Şimdiye kadar sürekli rejimde (kararlı hal) tek boyutlu ve ısı jenerasyonu olmayan durumlar için ısı iletimi, taşınımı ve ışınımını incelemiştik. Ancak incelediğimiz sistemlerde koşullar zamana bağlı değişmemişti. Gerçekte bir çok ısı geçişi problemi zamana bağlıdır. Kararlı hal sıcaklık dağılımı elde edilene kadar değişim devam eder.

Zamana bağlı denklemlerde katı içerisinde sıcaklık dağılımını bulmak için aşağıdaki denklem çözülmedir;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ancak katı içindeki sıcaklık gradyanı **ihmal edilebilir düzeydeyse** toplam kütle yaklaşımı kullanılabilir.

TOPLAM KÜTLE YAKLAŞIMI

- T_0 sıcaklığına sahip küçük ve sıcak bir bakır topun aniden T∞ sıcaklığına sahip soğuk su banyosuna daldırıldığını düşünelim, katı-sıvı arayüzeyinde taşınımla ısı transferi olurken top içerisinde iletimle ısı transferi olacaktır. Isı transferi topun sıcaklığı T∞ olana kadar kararsı halde devam edecektir.

- Eğer top küçük ve ısıl iletkenlik katsayısı oldukça yüksek olursa dış direncin yanında (taşınım), iç direnç (iletim) **ihmal edilebilir düzeyde** olur. Dolayısıyla ısı transfer sırasında her zaman katı içerisinde sıcaklık homojen olacaktır. Sıcaklık katı cisim içerisinde homojen dağılmıştır ancak sıcaklık zamana bağlı olarak değişebilecektir.

TOPLAM KÜTLE YAKLAŞIMI

Bu özel duruma toplam kütle yaklaşımı (lumped system) adı verilir ve ısı transfer analizi çözümünü basitleştirip kesin sonuç bulmamızı sağlar.

dt gibi kısa zaman aralıklarında katı cisim için ısı denkliği;

$-hA(T - T_\infty) = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$ ($mc_p dT$) integrasyon yapılırsa;

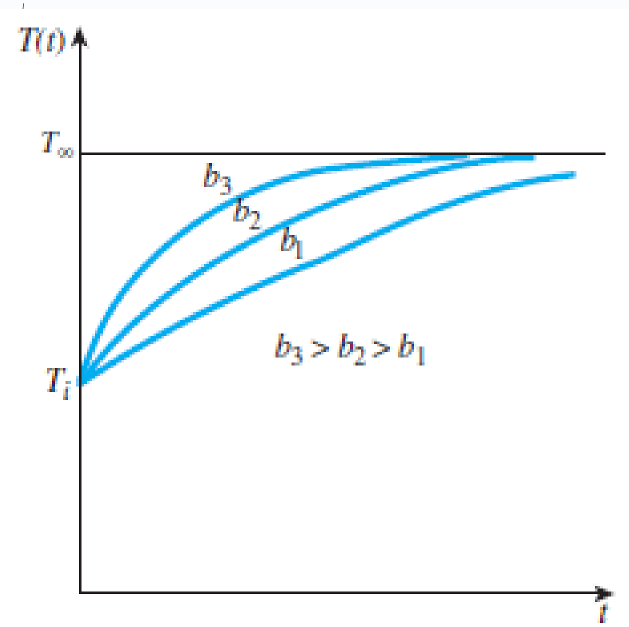
t=0 iken $T = T_0$ ve herhangi bir t anında $T = T_t$'dir.

$\frac{-hA}{\rho V c_p}\int_0^t dt = \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{(T-T_\infty)} \rightarrow \frac{-hA}{\rho V c_p} t = ln\left(\frac{T_t - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)$ her iki tarafın *ln*'ini alalım;

$\left(\frac{T_t - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = e^{-bt} \quad \rightarrow b = \frac{hA}{\boxed{\rho V c_p}}$ (1/s)

toplam kütle ısıl kapasitesi

TOPLAM KÜTLE YAKLAŞIMI



$$\left(\frac{T_t - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = e^{-bt}$$

- ✓ Bu denklem bize herhangi bir t anında cisim sıcaklığı olan T_t 'yi hesaplamamızda yardımcı olur.
- ✓ Cismin sıcaklığı ortam sıcaklığı olan T_∞'a üssel olarak yaklaşır. Cismin sıcaklığı başlarda daha hızlı sonra giderek yavaşlayarak değişir. b değerinin fazla olması cismin ortam sıcaklığına daha çabuk ulaşmasını sağlar.
- ✓ Toplam kütle yaklaşımında dış direncin iç direnç yanında ihmal edilebilir olduğu ve bu oranın 0.1'den daha düşük olduğu kabul edilebilir. Bu boyutsuz değişkene **Biot sayısı** adı verilir.

$$Bi = \frac{\text{İç direnç}}{\text{Dış direnç}} = \frac{L_c/kA}{1/hA} = \frac{hL_c}{k}$$

BIOT SAYISI

- $Bi = \frac{İç\ direnç}{Dış\ direnç} = \frac{L_C/kA}{1/hA} = \frac{hL_C}{k}$

burada L_C tek boyutlu ısı transferi gerçekleştiği durumda karakteristik uzunluğu gösterir. Örneğin kalınlığı 2L olan geniş bir düzlemsel duvarda L_C=L, yarıçapı r_0 olan uzun bir silindirde $L_C=r_0/2$, ve yarıçapı r_0 olan kürede ise $L_C=r_0/3$'tür. (L_C=V/A)

Toplam kütle yaklaşımı **sadece Bi≤0.1** olduğu durumlarda geçerlidir.

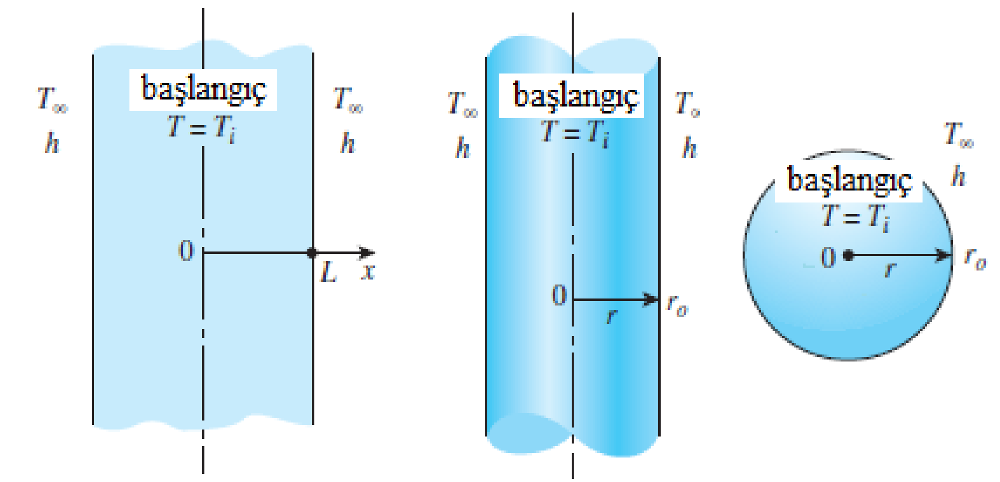
ÖRNEK SORU

- Alüminyum bir küre üzerinden geçen havanın taşınım ısı transfer katsayısı sıcaklık-zaman ilişkisi takip edilerek hesaplanacaktır. 50 mm çapında ve 300°C olan alüminyum küre aniden 15°C sıcaklıkta bir akışkanın içerisine bırakılmıştır. Suyun içine daldırılmasından 817 saniye sonra kürenin merkez sıcaklığı 90°C olarak ölçülmüştür. Aşağıda verilen özelliklere göre taşınım ısı transfer katsayısını hesaplayınız. (k_{al}=231W/mK, ρ_{al}=2702 kg/m^3, cp_{al}=1033 J/kg)
- **Varsayım:** Sistemi toplam kütle yaklaşımına uygun kabul edelim.
- $\left(\frac{T_t - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = e^{-bt} = e^{\left(-\frac{hA}{\rho V cp}t\right)} \rightarrow h = -\frac{\rho V cp}{tA} ln\left(\frac{T_t - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)$

Eşitlikte değerleri yerine koyduğumuzda h=38 W/m^{2}K çıkar. Ancak sistemin toplam kütle yaklaşımına uygun olup olmadığı kontrol edilmelidir!!!

Bi=$\frac{hL_c}{k} = 38 * \frac{0.025}{3*231} = 1.36 * 10^{-3} < 0.1$ *yani varsayımımız doğrudur*!

GENİŞ DÜZLEMSEL DUVARDA KONUMA BAĞLI KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ



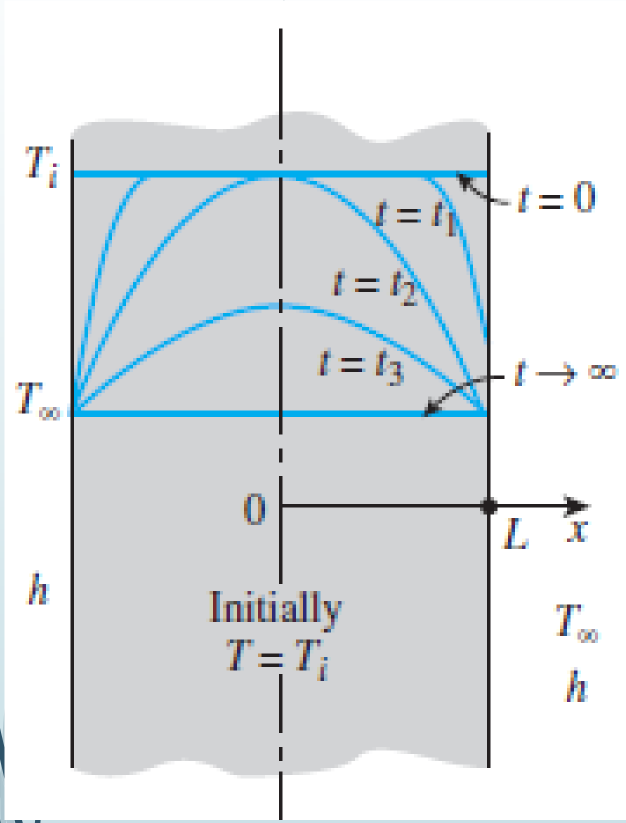
Her üç durumda da cisimlerin ısıl ve geometrik simetriye sahip oldukları, yani duvarın merkezde (x=0), silindirin merkez hattında (r=0)ve kürenin merkezde simetrik olduklarını bilmekteyiz.

Bi<0.1 DEĞİLSE!!!

- Oldukça küçük ve iletkenliği yüksek cisimlerde sıcaklık dağılımı ihmal edilebilir düzeydedir.
- Ancak geniş duvar, uzun silindir ve kürelerde sıcaklık zaman ve konuma bağlı olarak hesaplanmalıdır.

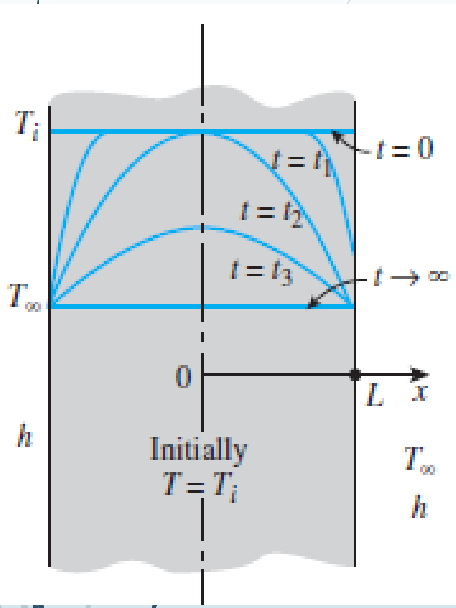
Şekilde görüldüğü gibi cisimler başlangıçta (t=0) T_∞ sıcaklığında olan bir ortamda t>0 kadar süre tutulmaktadır.

GENİŞ DÜZLEMSEL DUVARDA KONUMA BAĞLI KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ



- Düzlemsel duvardaki sıcaklık profili şekilde gösterilmiştir. Duvar t=0 anında $T_\infty < T_i$ sıcaklığında ortama koyulduğunda T_i ilk sıcaklığına sahiptir. Zaman geçtikçe duvarın kenarlarından itibaren sıcaklık düşmeye başlar ve duvar içerisinde **sıcaklık gradyanı** oluşur. Bu da duvar içerisinden yüzeyine doğru **ısı iletimi**ni başlatır. Zaman geçtikçe duvar içerisindeki sıcaklık profili giderek doğrusal hale gelir ve duvar iç sıcaklığı $T=T_\infty$ değerine ulaşır ve cisim ile ortam arasında ısıl denge elde edilir.

GENİŞ DÜZLEMSEL DUVARDA KONUMA BAĞLI KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ



- Isı jenerasyonu olmayan durumda, sabit termofiziksel özellik, merkez hattında ısıl simetri olan, homojen ilk sıcaklıktaki ve sabit taşınım katsayısı olduğunda tek boyutlu kararsız hal ısı iletimi;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\dot{e}_{gen}}{k}} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Dif. Denklem→ $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Sınır koşulu → $$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty]$$

Başlangıç koşulu→ $$T(x,0) = T_i$$

Burada $\alpha = \frac{k}{\rho c p}$ olup malzemenin ısıl difüzivitesini göstermektedir. Bu ısıl özellik malzemenin ne kadar ısı iletebildiğine karşı ne kadar ısı depolayabildiğini gösterir.

GENİŞ DÜZLEMSEL DUVARDA KONUMA BAĞLI KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ

- Belirtilen denklemi boyutsuz hale getirmek üzere X=x/L **boyutsuz konumu** için; **boyutsuz sıcaklık** terimini

θ(x,t)= [T(x,t)-T_∞]/[T_i/T_∞] kullanıyoruz. Denklem düzenlenince;

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$ ve $$\frac{\partial\theta(1,t)}{\partial X} = \frac{hL}{k}\theta(1,t)$$ elde edilir.

Burada süre yerine de **Fourier sayısı (Fo)** adı verilen $\boldsymbol{\tau = \frac{\alpha t}{L^2}}$ **boyutsuz süre** terimi tanımlanır. Denklemin tamamı boyutsuz hale getirildiğinde; $$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

Sınır koşulları $\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial X} = 0$ ve $\frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\,\theta(1,\tau)$

Başlangıç koşulu da $\theta(X,0) = 1$ olur.

KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ

- Belirtilen diferansiyelin analitik çözümü oldukça detaylıdır ve zaman alır bu yüzden analitik çözüm tablolar ve grafikler ile basit denklikler kullanılarak gerçekleştirilir. Uzun sürelerde yani $\tau > 0.2$ olduğunda dif. denklemin ilk terimi çözümde kullanılır;

Düzlemsel duvar→

$$\theta_{wall} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2$$

Silindir→

$$\theta_{cyl} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0.2$$

Küre→

$$\theta_{sph} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0.2$$

KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ Tablodan!

Düzlemsel duvar merkezi (x=0)→

$$\theta_{0,\,\text{wall}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Silindir merkezi (r=0)→

$$\theta_{0,\,\text{cyl}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Küre merkezi (r=0)→

$$\theta_{0,\,\text{sph}} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

A_1 ve λ_1 Biot'a göre Tablo 4.2'den okunur

TABLE 4–2

Coefficients used in the one-term approximate solution of transient one-dimensional heat conduction in plane walls, cylinders, and spheres (Bi = hL/k for a plane wall of thickness $2L$, and Bi = hr_o/k for a cylinder or sphere of radius r_o)

	Plane Wall		Cylinder		Sphere	
Bi	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179

TABLE 4–3

The zeroth- and first-order Bessel functions of the first kind

η	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867

KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ Tablodan!

Düzlemsel duvar →

$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{wall} = 1 - \theta_{0,\,wall}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}$$

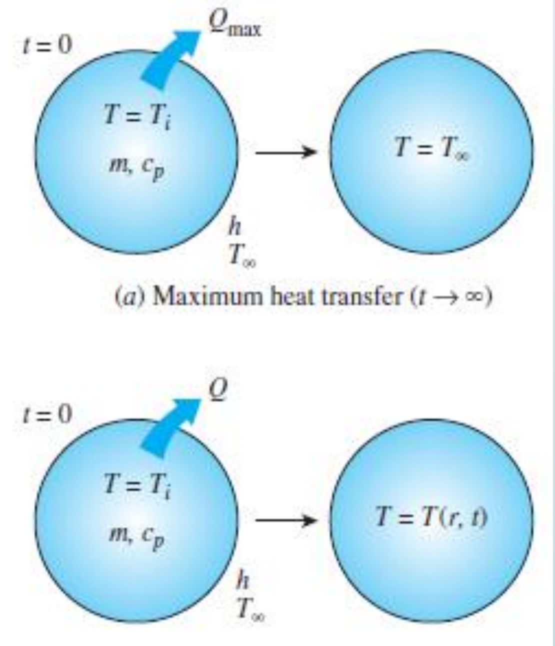
Silindir →

$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{cyl} = 1 - 2\theta_{0,\,cyl}\frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

Küre →

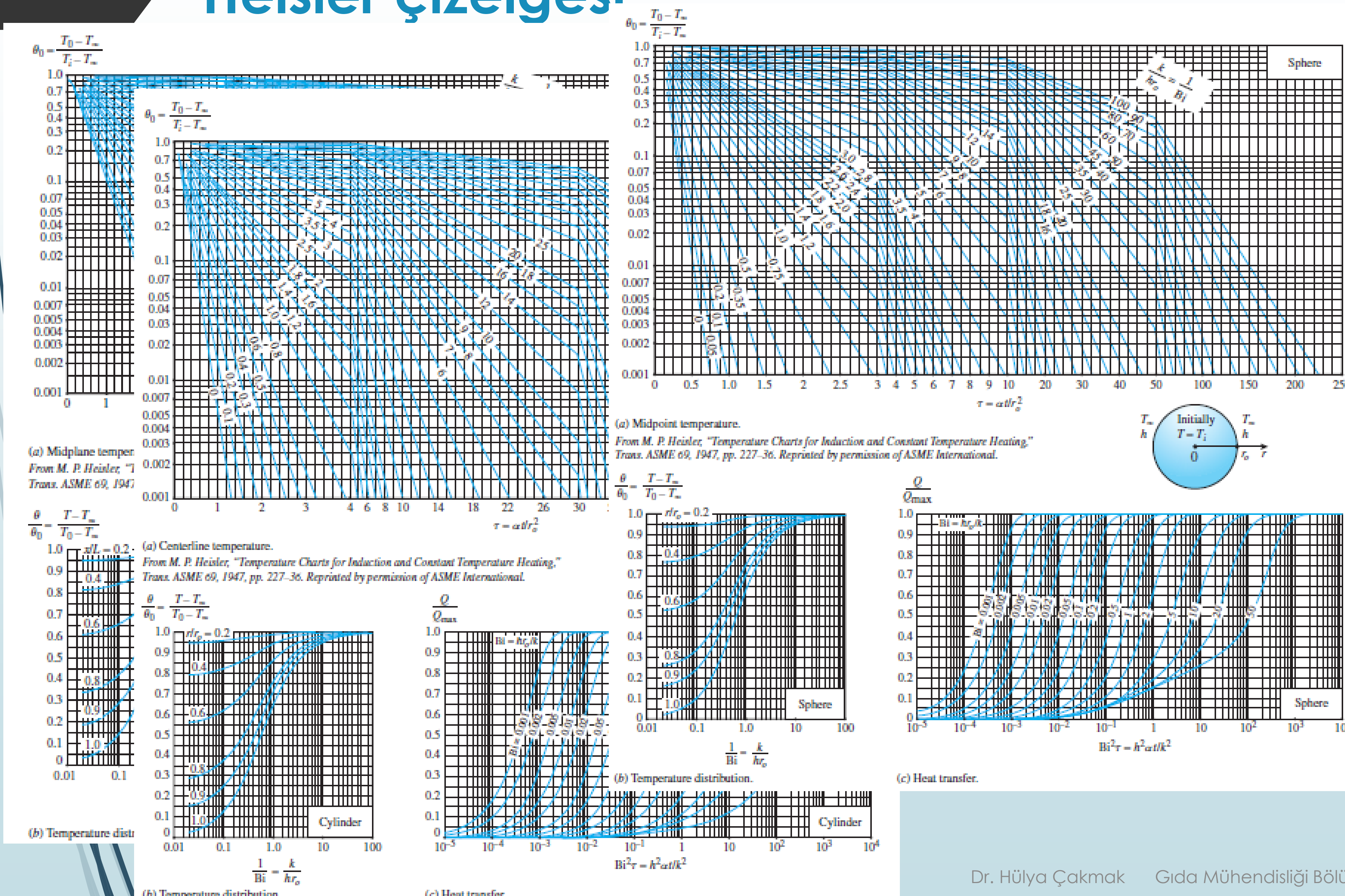
$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{sph} = 1 - 3\theta_{0,\,sph}\frac{\sin\lambda_1 - \lambda_1\cos\lambda_1}{\lambda_1^3}$$

λ_1 Biot'a göre Tablo 4.2'den okunur

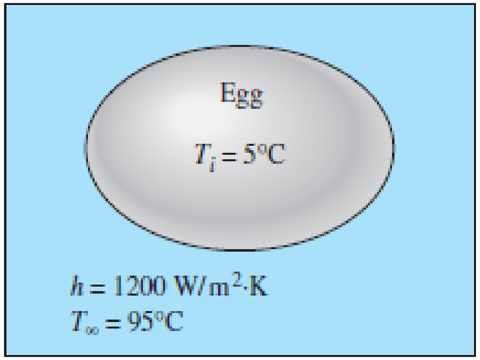


(a) Maximum heat transfer ($t \to \infty$)

KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ
Heisler çizelgesi



KARARSIZ HAL ISI TRANSFERİ ÇÖZÜMÜ
Örnek soru



5 cm çapında küre olarak kabul edilen bir yumurta başlangıçta homojen ve 5°C sıcaklıkta ve 95°C'deki suyun içine atılmıştır. Konvektif ısı transfer katsayısı $h=1200 W/m^2K$ ise yumurtanın merkezinin 70°C'ye gelmesi için geçmesi gereken süre nedir?