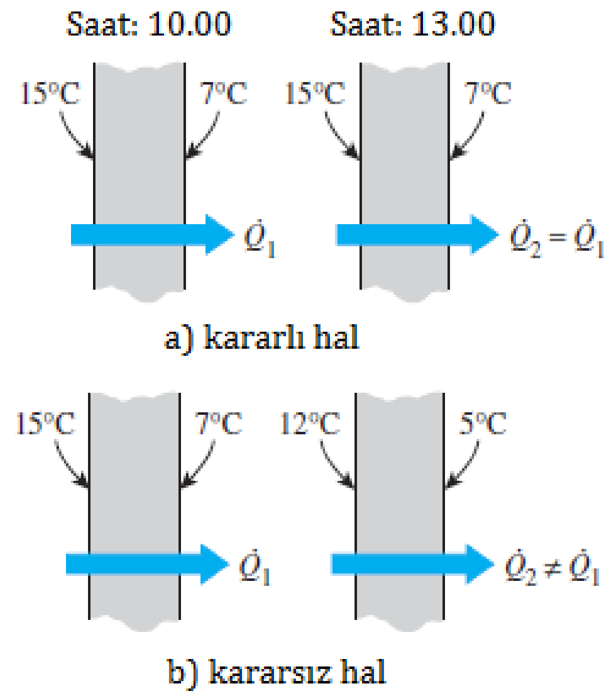
KARARLI HAL ISI İLETİMİ

Dr. Hülya ÇAKMAK

Gıda Mühendisliği Bölümü

Sürekli rejim/kararlı hal (steady-state) & Geçici rejim/kararsız hal (transient/ unsteady state)

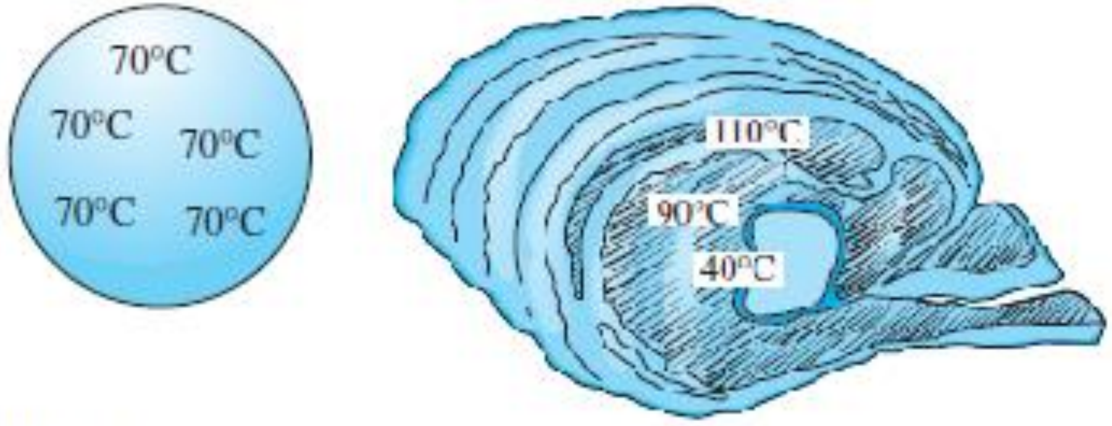
Isı transferi problemleri kararlı hal ve kararsız hal olarak gruplandırılır. Kararlı hal, sistem içerisindeki herhangi bir noktada zamanla sıcaklıkta herhangi bir değişim olmadığını (<u>konuma göre olabilir</u>), kararsız hal ise, zamanla ve konuma bağımlı olarak sıcaklıkta bir değişim olduğunu belirtmektedir.



Dr. Hülya ÇAKMAK

Toplam kütle yaklaşımı (Lumped capacity)

Kararlı ve kararsız hal dışında «toplam kütle yaklaşımı (lumped capacity)» olarak adlandırılan özel bir koşul vardır; burada sistem içerisinde sıcaklık konuma göre değil sadece zamanın fonksiyonu olarak değişir. Bu özel durum oldukça iletken küçük cisimlerde gözlemlenebilir (örn: bakır)



Küçük bakır top   Fırınlanmış et

Dr. Hülya ÇAKMAK

Kararlı Hal Isı İletimi

Genel ısı transferi denkliği;

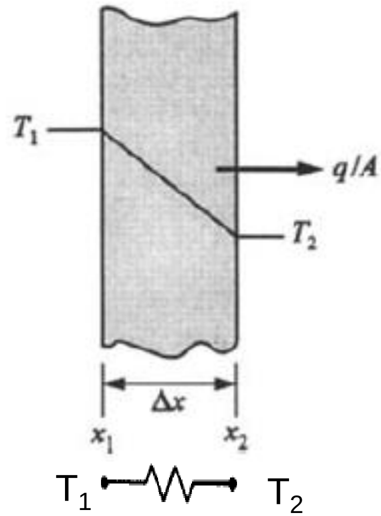
$$\left(Isı\ transfer\ hızı_{giren}\right) + \left(Isı\ transfer\ hızı_{üretilen}\right) = \left(Isı\ transfer\ hızı_{çıkan}\right) + \left(Isı\ transfer\ hızı_{biriken}\right)$$

Isı transferi sadece iletim ile oluyorsa bu denkliği yeniden yazarsak (Fourier kanunu);

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Düzlemsel duvar

Her iki tarafı da sabit sıcaklıkta tutulan sabit ısıl iletkenlik değerine sahip homojen materyalden yapılan düzlemsel duvardaki tek boyutlu kararlı haldeki ısı transferi;



$$\frac{q}{A} = k\,\frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / kA} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

Sürükleyici kuvvet

direnç

Dr. Hülya ÇAKMAK

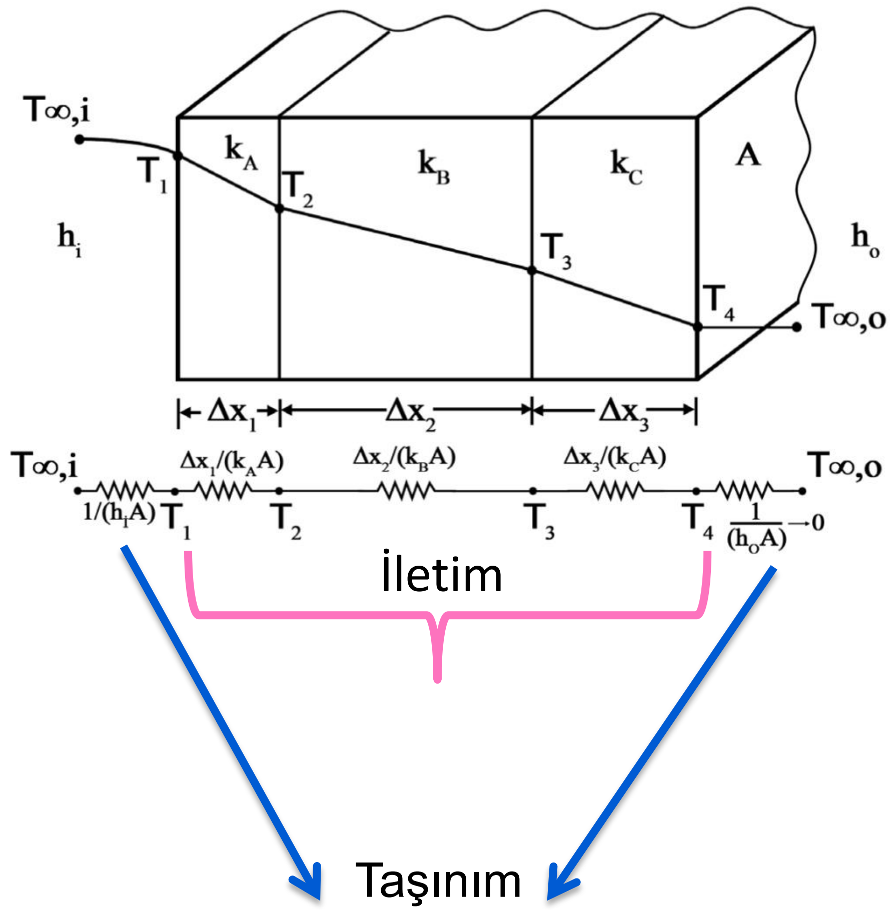
KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı düzlemsel duvar

Isı rezistansı kavramı:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / kA} = \frac{T_1 - T_2}{R_{top}}$$

katmanların yüzeyleri arası iletim her katman için ısı transferine dik alan birbirine eşit ve A ise;

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{\Delta x_1}{k_A A}\right) + \left(\frac{\Delta x_2}{k_B A}\right) + \left(\frac{\Delta x_3}{k_C A}\right)}$$



KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı düzlemsel duvar

İç taraftaki $T_{\infty,i}$ ile A duvarı yüzeyi (T_1) arasında taşınımla ısı transferi akısı;

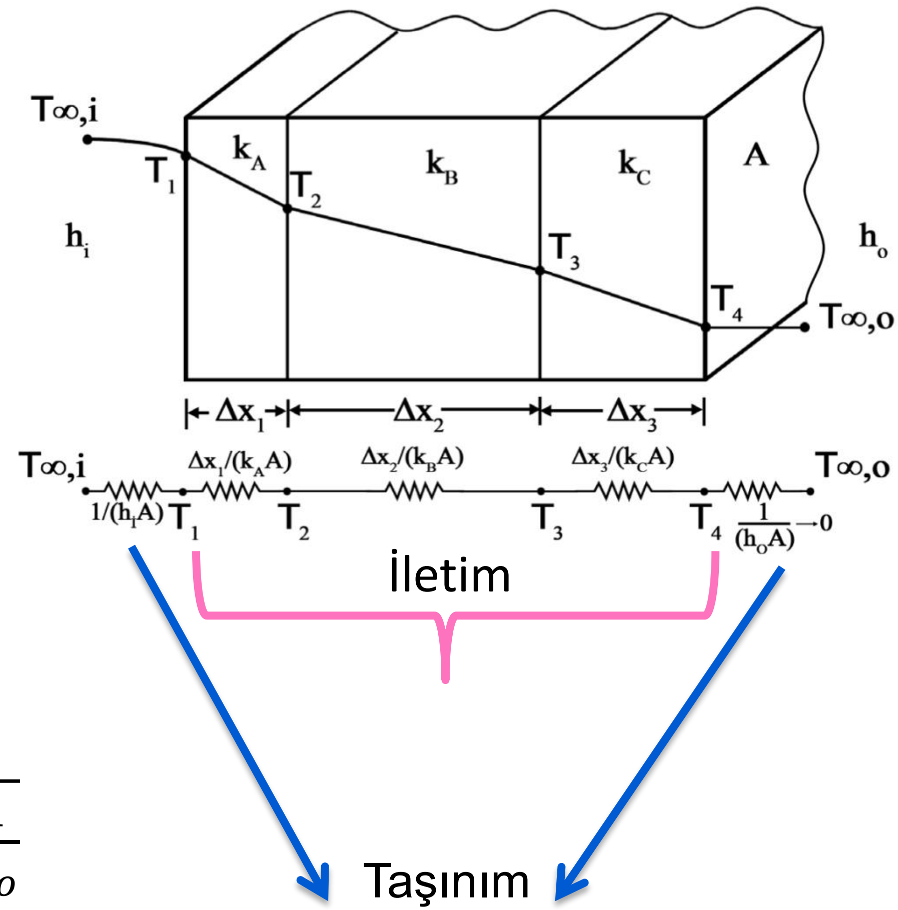
$$\dot{q}_i = h(T_{\infty,i} - T_1)$$

dış taraftaki $T_{\infty,i}$ ile C duvarı yüzeyi (T_4) arasında taşınımla ısı transferi akısı;

$$\dot{q}_o = h(T_4 - T_{\infty,o})$$

$T_{\infty,i}$ ile $T_{\infty,o}$ arasındaki toplam ısı transferi akısı;

$$\dot{q} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{\frac{1}{h_i} + \left(\frac{\Delta x_1}{k_A}\right) + \left(\frac{\Delta x_2}{k_B}\right) + \left(\frac{\Delta x_3}{k_C}\right) + \frac{1}{h_o}}$$



Dr. Hülya ÇAKMAK

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı düzlemsel duvar

Örnek soru: 0.8 m yüksekliğinde 1.5 m genişliğinde çift katlı pencere 2 adet 4 mm kalınlığında cam katmanı (k=0.78W/mK) ve bunların arasında da 10 mm kalınlığında boşlukta da durgun hava (k=0.026W/mK) içermektedir. Bu çift katmanlı pencere boyunca kararlı hal ısı aktarımını ve odaya bakan cam yüzeyindeki sıcaklığı bulunuz. Odanın iç sıcaklığı 20°C, dış sıcaklık ise -10°C alınabilir. Ayrıca pencerenin iç ve dış yüzeyindeki konvektif ısı transfer katsayısını sırasıyla h_1 =10W/m^{2}K ve h_2=40W/m^{2}K alabilirsiniz.

Dr. Hülya ÇAKMAK

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı düzlemsel duvar

$$R_i = R_{\text{conv},\,1} = \frac{1}{h_1 A} = \frac{1}{(10\ \text{W/m}^2\cdot\text{K})(1.2\ \text{m}^2)} = 0.08333°\text{C/W}$$

$$R_1 = R_3 = R_{\text{glass}} = \frac{L_1}{k_1 A} = \frac{0.004\ \text{m}}{(0.78\ \text{W/m}\cdot\text{K})(1.2\ \text{m}^2)} = 0.00427°\text{C/W}$$

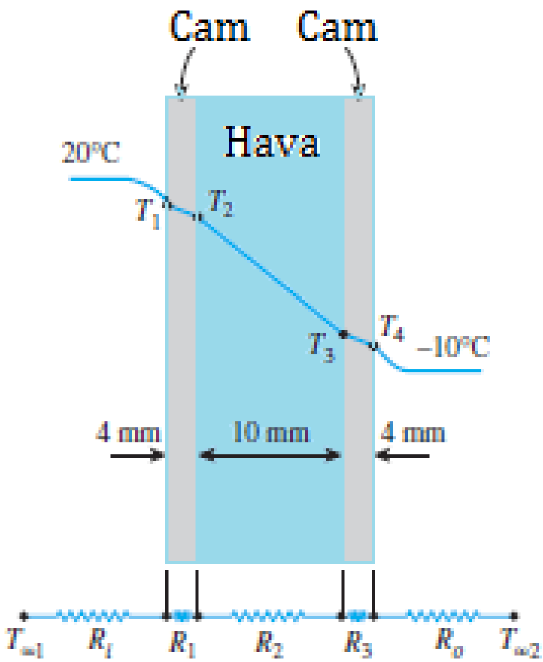
$$R_2 = R_{\text{air}} = \frac{L_2}{k_2 A} = \frac{0.01\ \text{m}}{(0.026\ \text{W/m}\cdot\text{K})(1.2\ \text{m}^2)} = 0.3205°\text{C/W}$$

$$R_o = R_{\text{conv},\,2} = \frac{1}{h_2 A} = \frac{1}{(40\ \text{W/m}^2\cdot\text{K})(1.2\ \text{m}^2)} = 0.02083°\text{C/W}$$

$$\begin{aligned} R_{\text{total}} &= R_{\text{conv},\,1} + R_{\text{glass},\,1} + R_{\text{air}} + R_{\text{glass},\,2} + R_{\text{conv},\,2} \\ &= 0.08333 + 0.00427 + 0.3205 + 0.00427 + 0.02083 \\ &= 0.4332°\text{C/W} \end{aligned}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}} = \frac{[20 - (-10)]°\text{C}}{0.4332°\text{C/W}} = 69.2\ \text{W}$$

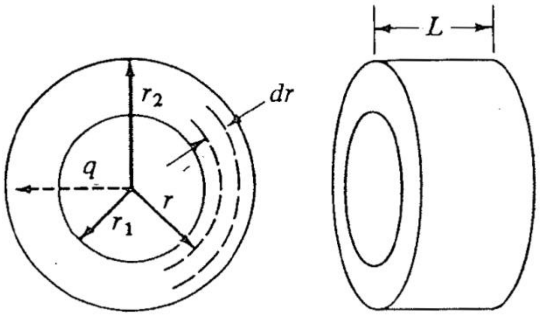
$$T_1 = T_{\infty 1} - \dot{Q}R_{\text{conv},\,1} = 20°\text{C} - (69.2\ \text{W})(0.08333°\text{C/W}) = 14.2°\text{C}$$



Dr. Hülya ÇAKMAK

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ

İçi boş silindir



İç çapı r_1 ve içteki sıcaklığı T_1 olan ve dış çapı r_2 ve sıcaklığı T_2 olan içi boş L uzunluğunda bir silindir (boru) olduğunu düşünelim. Isının merkezden yüzeye doğru radyal yönde aktarlıyorsa, Fourier kanununu yeniden yazalım;

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dr}$$

Isı akışına dik olan yüzey alan $A = 2\pi rL$, denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{q}{2\pi rL}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -k\int_{T_1}^{T_2}\Delta T \rightarrow q = k\,\frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}(T_1 - T_2)$$

$$q = kA_{lm}\frac{(T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)} = \frac{(T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)/kA_{lm}} \rightarrow A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}, \quad R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$$

Dr. Hülya ÇAKMAK

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
İçi boş silindir

<u>Örnek soru:</u> Kalın duvarlı kauçuktan yapılan silindirik bir borunun iç çapı 5mm ve dış çapı 20mm'dir. Boru içerisinden hızla buzlu su geçirilmekte ve iç duvar sıcaklığı 274.9K olarak ölçülmektedir. Dış yüzey sıcaklığı ise 297.1 K ölçülmüştür. Borunun daldırıldığı su banyosundan toplam 14.65 W ısı uzaklaştırılması isteniyorsa borunun uzunluğu ne kadar olmalıdır? (kauçuk için k=0.151 W/mK)

$$r_1 = \frac{5}{1000} = 0.005 \text{ m} \qquad r_2 = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ m}$$

Boru 1 m kabul edildiğinde

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi(1.0)(0.005) = 0.0314 \text{ m}^2 \qquad A_2 = 0.1257 \text{ m}^2$$

$$A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = 0.0680 \text{ m}^2$$

$$q = kA_{lm}\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = 0.151(0.0682)\left(\frac{274.9 - 297.1}{0.02 - 0.005}\right) = -15.2 \text{ W}$$

$$\text{L} = \frac{14.65 \text{ W}}{15.2 \text{ W/m}} = 0.964 \text{ m}$$

Dr. Hülya ÇAKMAK

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
İçi boş küre

Tek boyutlu iletimin bir diğer durumu da içi boş küreden ısı iletimidir. Fourier kanununu yeniden yazalım;

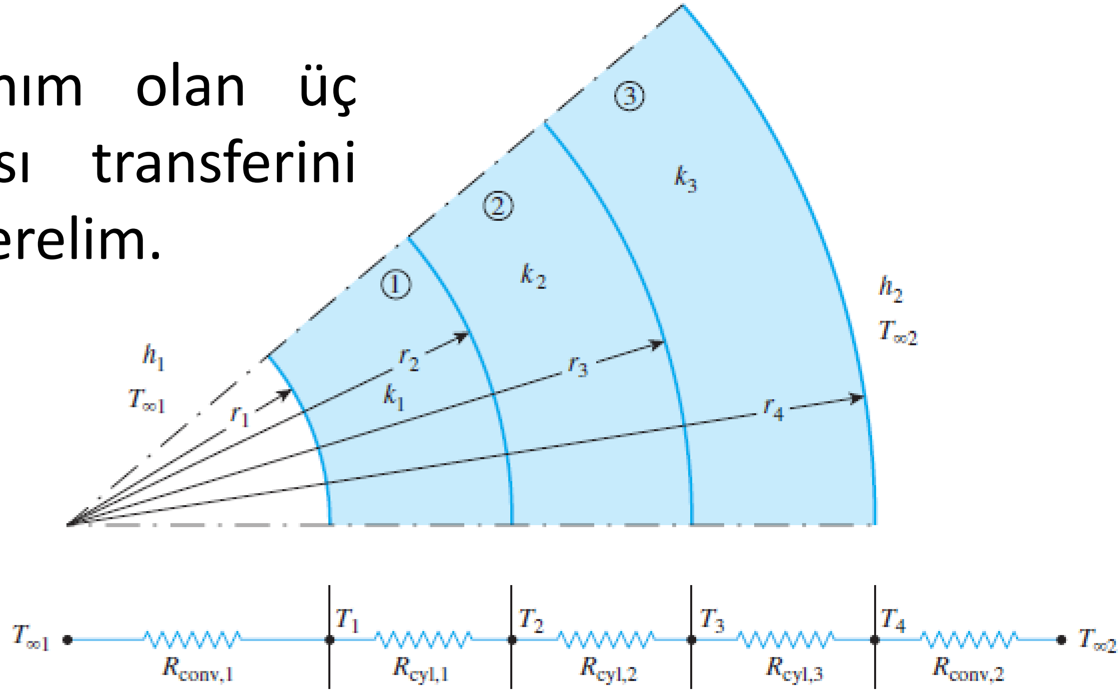
$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dr} \qquad A = 4\pi r^{\,2}$$

$$\frac{q}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}$$

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı silindir

Her iki yönden taşınım olan üç katmanlı silindirde ısı transferini dirençler şeklinde gösterelim.



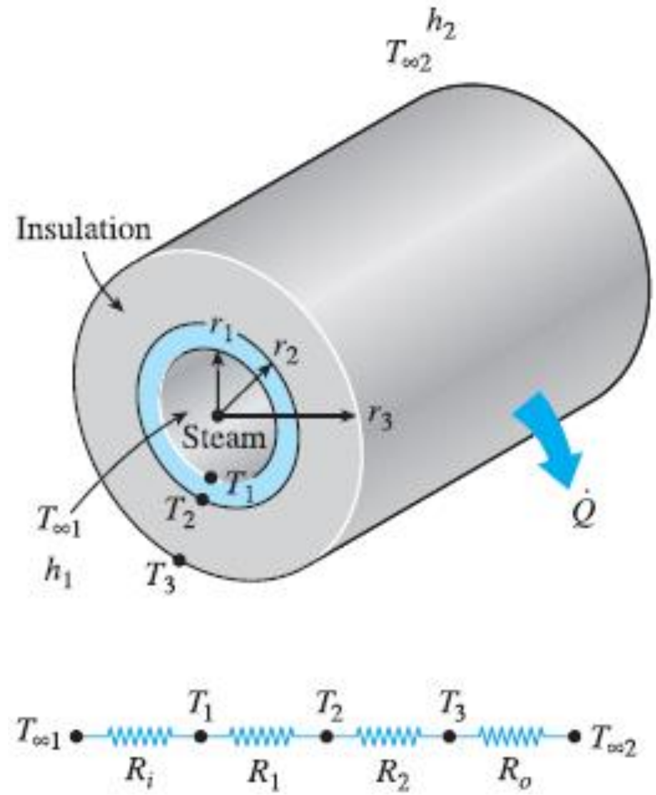
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$

$$\begin{aligned} R_{total} &= R_{conv,\,1} + R_{cyl,\,1} + R_{cyl,\,2} + R_{cyl,\,3} + R_{conv,\,2} \\ &= \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{h_2 A_4} \end{aligned}$$

KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ

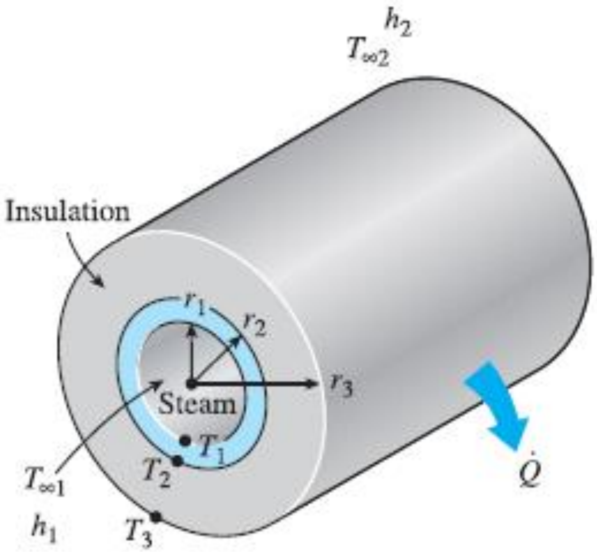
Çok katmanlı silindir

Örnek: Buhar iç çapı D_1=5 cm ve dış çapı D_2=5.5 cm olan dökme demir bir borudan (k=80W/mK) $T_{\infty 1}$=320°C sıcaklıkta akmaktadır. Borunun dışı 3 cm kalınlığında cam yünü izolasyon (k=0.05 W/mK) ile kaplanmıştır. $T_{\infty 2}$=5°C sıcaklıktaki dış ortama doğal taşınım ve radyasyonla kaybedilen ısının birleştirilmiş ısı transfer katsayısı h_2=18W/m^{2}K'dir. Borunun içindeki konvektif ısı transfer katsayısını h_1=60W/m^{2}K olarak alarak birim boru uzunluğu için kaybedilen ısının aktarım hızını hesaplayınız. Ayrıca boru et kalınlığı ve izolasyon kalınlığındaki sıcaklık düşüşünü hesaplayınız.



KARARLI HAL TEK BOYUTLU ISI İLETİMİ
Çok katmanlı silindir-Örnek

$$A_1 = 2\pi r_1 L = 2\pi(0.025 \text{ m})(1 \text{ m}) = 0.157 \text{ m}^2$$
$$A_3 = 2\pi r_3 L = 2\pi(0.0575 \text{ m})(1 \text{ m}) = 0.361 \text{ m}^2$$



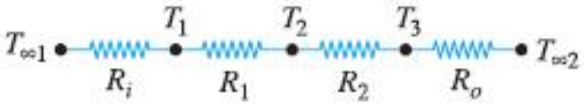
$$R_i = R_{\text{conv, 1}} = \frac{1}{h_1 A_1} = \frac{1}{(60 \text{ W/m}^2\cdot\text{K})(0.157 \text{ m}^2)} = 0.106°\text{C/ W}$$

$$R_1 = R_{\text{pipe}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} = \frac{\ln(2.75/2.5)}{2\pi(80 \text{ W/m}\cdot\text{K})(1 \text{ m})} = 0.0002°\text{C/ W}$$

$$R_2 = R_{\text{insulation}} = \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} = \frac{\ln(5.75/2.75)}{2\pi(0.05 \text{ W/m}\cdot\text{K})(1 \text{ m})} = 2.35°\text{C/ W}$$

$$R_o = R_{\text{conv, 2}} = \frac{1}{h_2 A_3} = \frac{1}{(18 \text{ W/m}^2\cdot\text{K})(0.361 \text{ m}^2)} = 0.154°\text{C/ W}$$

$$R_{\text{total}} = R_i + R_1 + R_2 + R_o = 0.106 + 0.0002 + 2.35 + 0.154 = 2.61°\text{C/W}$$



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}} = \frac{(320 - 5)°\text{C}}{2.61°\text{C/W}} = 121 \text{ W}$$

1 metre boru başına!

$$\Delta T_{\text{pipe}} = \dot{Q} R_{\text{pipe}} = (121 \text{ W})(0.0002°\text{C/ W}) = 0.02°\text{C}$$
$$\Delta T_{\text{insulation}} = \dot{Q} R_{\text{insulation}} = (121 \text{ W})(2.35°\text{C/ W}) = 284°\text{C}$$

Dr. Hülya ÇAKMAK

KRİTİK İZOLASYON YARIÇAPI

İzolasyon eklenmesi ısı transfer hızını her zaman düşürmektedir. Düzlemsel bir duvarda iletim direnci izolasyon kalınlığını arttırmakla artmaktadır. Taşınım direncinde ise herhangi bir değişiklik olmamaktadır.

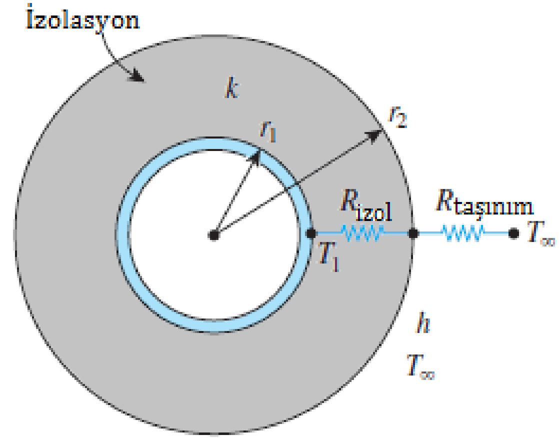
Silindirik bir boru sistemine daha fazla izolasyon eklenmesi iletime bağlı direnci arttırmaktadır. Ancak taşınım direnci, daha fazla izolasyon eklenmesiyle akışa dik alanın artışına bağlı olarak azalmaktadır. Bu yüzden silindirik geometrilerde ısı transfer hızı izolasyonun varlığına bağlı olarak azalmakta veya artmaktadır.

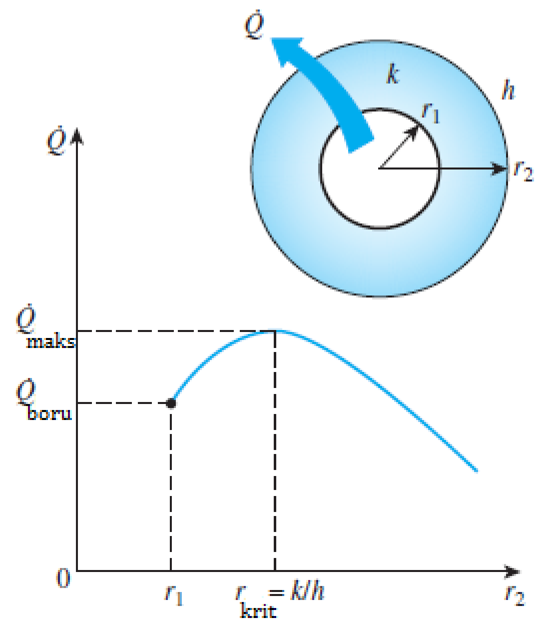
İzolasyon için bir kritik izolasyon çapı bulunmalıdır.

Dr. Hülya ÇAKMAK

KRİTİK İZOLASYON YARIÇAPI

r_1 yarıçapında boru sisteminin dışına izolasyon kaplanmış olduğunu düşünelim. Boru dışındaki sıcaklığın T_1, dışındaki sıcaklığın T_2 olduğu ve borunun etrafındaki hava sıcaklığının T_∞ ve boru dışı ile hava arasındaki konvektif ısı transfer katsayısı h_{hava} olarak verilmiş olsun. Sistem kararlı halde olup ısı jenerasyonu olmadığı durumda izolasyondaki iletimle ısı transferi, borunun dışını çevreleyen hava ile boru dış yüzeyi arasındaki taşınımla ısı transfer hızına eşit olacaktır.





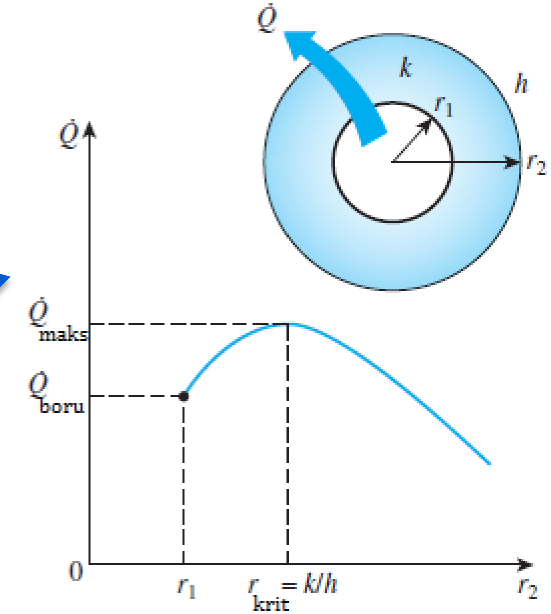
Dr. Hülya ÇAKMAK

KRİTİK İZOLASYON YARIÇAPI

$$\dot{Q}_{taş} = \dot{Q} = h_{hava} * 2\pi r_2 L(T_2 - T_\infty)$$

$$\dot{Q}_{ilet} = \dot{Q} = 2\pi L k_{izo} \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{ins} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} + \frac{1}{h(2\pi r_2 L)}}$$



r_2 çapının değişimine bağlı Q değerinin değişim grafiği çizildiğinde en yüksek değerin $d\dot{Q}/dr_2 = 0$ eğim sıfıra geldiği belirlenir. Diferansiyel çözüldüğünde;

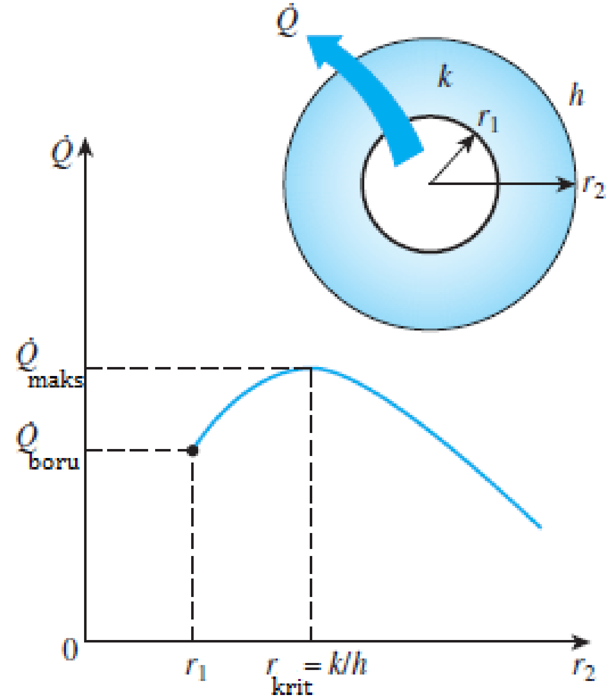
$$\boxed{(r_2)_{kritik} = \frac{k_{izo}}{h_{hava}}}$$

Dr. Hülya ÇAKMAK

KRİTİK İZOLASYON YARIÇAPI

En yüksek kritik izolasyon çapı k değeri maksimum h değeri de minimum olduğunda elde edilir. En çok kullanılan izolasyon malzemesinin iletim katsayısı 0.05 W/mK civarındayken pratikte h'ın en düşük değeri 5W/m^{2}K olarak düşünülebilir. Böylelikle en yüksek kritik izolasyon yarıçapı 0.01 m yani 1cm olduğu görülmektedir.

Zorlamalı taşınımda bu değer 1mm'den düşüktür, çünkü zorlamalı taşınımda h değerleri çok daha yüksektir.



Dr. Hülya ÇAKMAK