Fonksiyonlar ve Yüzeyler

İki Değişkenli Fonksiyonlar

Dairesel silindirin V hacmi, r yarıçapına ve h yüksekliğine bağlıdır. Aslında, $V = \pi r^2 h$ olduğunu biliyoruz. V ye r ve h nin fonksiyonu deriz ve $V(r,h) = \pi r^2 h$ yazarız.

Tanım 1

İki değişkenli f fonksiyonu, D kümesinden her bir sıralı (x,y) gerçel sayı ikilisine, $f(x,y)$ ile gösterilen tek bir gerçel sayı karşılık getiren kuraldır. D, f nin **tanım kümesidir** ve f nin aldığı değerlerin $\{f(x,y)|(x,y) \in D\}$ kümesine de **görüntü kümesi** denir.

f nin genel bir (x,y) noktasında aldığı değeri sıklıkla $z = f(x,y)$ ile gösteririz. x ve y **bağımsız değişkenler**, z ise **bağımlı değişkendir**.

Tanım kümesi, $\mathbb{R}^2$ nin, xy-düzleminin, bir alt kümesidir.
Tanım kümesini mümkün olan tüm girdilerin kümesi, görüntü kümesini de çıktıların kümesi olarak düşünebiliriz.

Fonksiyon, tanım kümesi belirtilmeden, bir formül ile verildiğinde tanım kümesi olarak, verilen ifadenin iyi tanımlı gerçel sayı değerleri ürettiği tüm (x, y) ikililerinin kümesi alınır.

Örnek 2

$f(x, y) = 4x^2 + y^2$ ifadesiyle verilen $f(x, y)$ fonksiyonu tüm (x, y) sıralı gerçel sayı ikilileri için tanımlı olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}^2$, tüm xy-düzlemidir.

Görüntü kümesi ise tüm negatif olmayan gerçel sayılar, $[0, \infty)$ dur. [$x^2 \geq 0$ ve $y^2 \geq 0$ olduğundan tüm x ve y ler için $f(x, y) \geq 0$ olduğuna dikkat ediniz.]

Örnek 3

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini ve $f(3, 2)$ yi bulunuz.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

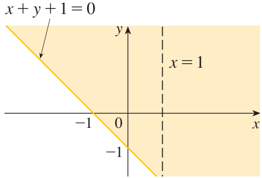
(b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Çözüm.

(a) f için verilen ifade, paydanın 0 olmadığı ve karekökün içindeki terimin negatif olmadığı durumda anlamlıdır. Bu yüzden tanım kümesi

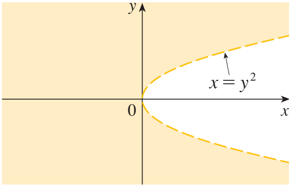
$$D = \{(x, y) \big| x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\} \text{ dir.}$$

$x+y+1 \geq 0$ ya da $y \geq -x-1$ eşitsizliği $y = -x - 1$ doğrusunun üzerinde ya da üstündeki noktaları verir. $x \neq 1$ ise $x = 1$ doğrusunun üzerindeki noktaların alımaması gerektiğini söyler.



Çözüm (devamı).

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(b) 

$\ln(y^2 - x)$ yalnızca $y^2 - x > 0$, ya da $x < y^2$ iken tanımlı olduğu için, tanım kümesi

$$D = \{(x,y) \mid x < y^2\}$$

dir. Bu, $x = y^2$ parabolünün solundaki noktaların kümesidir.

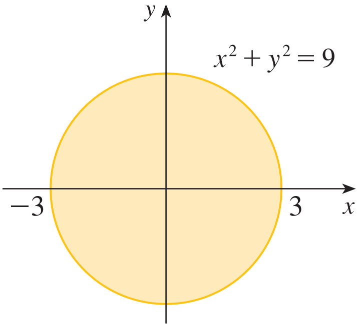
$$f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$$

□

Örnek 4

$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.



g nin tanım kümesi

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) | 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\} \end{aligned}$$

merkezi $(0, 0)$ ve yarıçapı 3 olan dairedir.

Çözüm (devamı).

g nin görüntüsü

$$\left\{z | z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

dir. z pozitif karekök olduğundan $z \geq 0$ olur. Ayrıca

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

dür. Buradan görüntü kümesi

$$\{z | 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

olarak bulunur. □

Görsel Temsiller

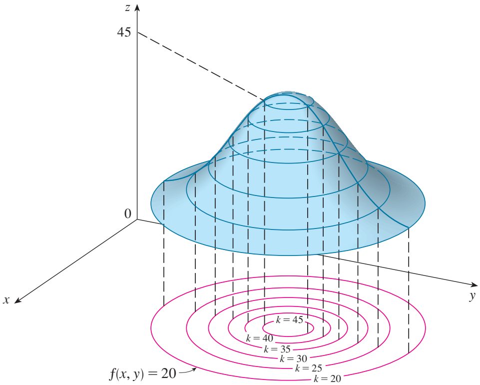
İki değişkenli bir fonksiyonu görselleştirmenin bir yolu da onun grafiğidir. f nin grafiği, denklemi $z = f(x, y)$ olan yüzeydir.
Fonksiyonları görselleştirmenin diğer bir yolu da haritacılardan ödünç alınan aynı yükseklikteki noktaların birleştirilmesiyle elde edilen **kesit** (ya da **kontur**) eğrileridir.

Tanım 5

İki değişkenli bir f fonksiyonunun **kesit eğrileri**, k (f nin görüntü kümesinde) bir sabit olmak üzere denklemi $f(x, y) = k$ olan eğrilerdir.

Bir $f(x, y) = k$ kesit eğrisi, f nin tanım kümesinde, f nin, verilen bir k değerini aldığı noktaların kümesidir. Diğer bir deyişle, f nin grafiğinin yüksekliğinin nerede k olduğunu gösterir.

Aşağıdaki şekilde kesit eğrileri ile yatay izler arasındaki ilişkiyi görebilirsiniz. $f(x, y) = k$ kesit eğrileri, f nin grafiğinin $z = k$ yatay düzlemi ile arakesitinin xy-düzlemine izdüşümleridir. Bu yüzden, eğer bir fonksiyonun kesit eğrilerini çizer ve onları yüzey üzerinde belirtilen düzeye yükseltirseniz zihninizde grafiği oluşturabilirsiniz. Kesit eğrilerinin birbirine yakın olduğu yerlerde yüzey dikleşmekte, uzak olduğunda ise düzleşmektedir.



Örnek 6

$$g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}=k$$

fonksiyonunun $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ değerleri için kesit eğrilerini çiziniz.

Çözüm.

Kesit eğrileri

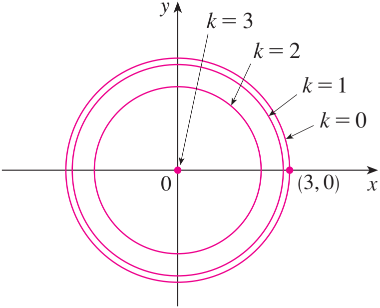
$$\sqrt{9-x^2-y^2}=k \quad \text{ya da} \quad x^2+y^2=9-k^2$$

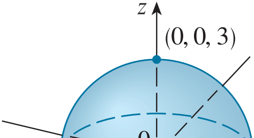
eğrileridir. Bunlar, merkezi $(0,0)$ yarıçapı $\sqrt{9-k^2}$. olan eşmerkezli çemberlerdir. Bu eğriler $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ için aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Bu kesit eğrilerinin yükseltilerek bir yüzey oluşturduğunu görselleştirmeye çalışınız ve bunu g nin grafiği (bir yarıküre) ile karşılaştırınız.

Çözüm (devamı).

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$$

fonksiyonunun kontur haritası ve grafiği aşağıdaki şekildedir.





Üç veya Daha Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

Üç değişkenli bir f fonksiyonu, bir $D \subset \mathbb{R}^3$ tanım kümesindeki her (x, y, z) sıralı üçlüsüne, $f(x, y, z)$ ile gösterilen **tek bir** gerçel sayı getiren bir kuraldır.

Örneğin, dünya'nın bir noktasındaki T sıcaklığı, bu noktanın x boylamına y enlemine ve t zamanına bağlıdır, bu nedenle $T = f(x, y, t)$ yazabiliriz

Örnek 7

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.

$f(x, y, z)$ nin ifadesi $z - y > 0$ olduğunda tanımlıdır, bu nedenle f nin tanım kümesi

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > y\}$$

olur. Bu küme $z = y$ düzleminin yukarısında kalan tüm noktalardan oluşan **yarı uzaydır**. □

Dört boyutlu bir uzayda bulunması nedeniyle üç değişkenli bir f fonksiyonunu grafiğiyle görselleştirmek çok zordur.

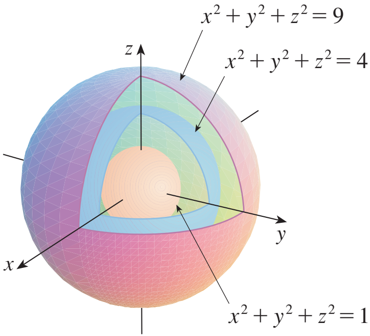
Yine de, **kesit yüzeyleri** adı verilen $f(x, y, z) = k$ denklemine sahip yüzeyleri inceleyerek f hakkında biraz bilgi edinebiliriz.
Bir (x, y, z) noktası bir kesit yüzeyi üzerinde hareket ederse $f(x, y, z)$ nin değeri aynı kalır.

Örnek 8

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

fonksiyonunun kesit yüzeylerini bulunuz.

Çözüm.



Kesit yüzeyleri, $k \geq 0$ olmak üzere $x^2+y^2+z^2 = k$ yüzeyleridir. Bunlar, yarıçapı $\sqrt{k}$ olan eşmerkezli küreler oluştururlar. Bu nedenle, (x, y, z), O merkezli bir küte üzerinde hareket ederken, $f(x, y, z)$ nin değeri aynı kalır. □

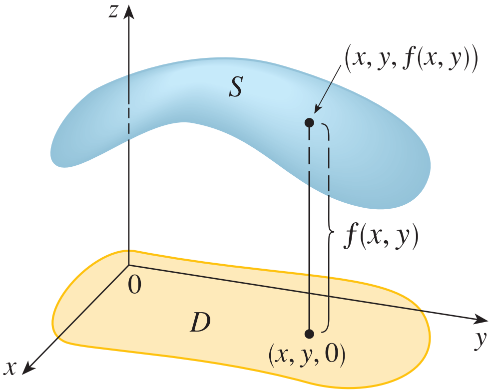
Grafikler

Tanım 9

Tanım kümesi D olan iki değişkenli bir f fonksiyonunun **grafiği**, D deki (x, y) ler için $z = f(x, y)$ koşulunu sağlayan $\mathbb{R}^3$ teki (x, y, z) noktalarının kümesidir.

Bir değişkenli f fonksiyonunun grafiği $y = f(x)$ denklemi ile verilen C eğrisi olduğu gibi, iki değişkenli f fonksiyonunun grafiği de $z = f(x, y)$ denklemiyle verilen S yüzeyidir.

f nin S grafiğini xy-düzlemindeki D tanım kümesinin tam üstünde ya da altında görebiliriz.

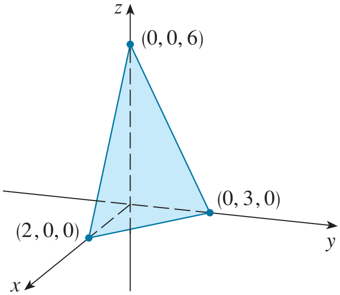


Örnek 10

$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.

f nin grafiği $z = 6 - 3x - 2y$ ya da $3x + 2y + z = 6$ denklemi ile verilir be bu bir düzlemi temsil eder. Kesenleri bularak grafiğin birinci bölgede kalan kısmını aşağıdaki şekilde çizebiliriz. □



Önceki Örnekteki fonksiyon

$$f(x, y) = ax + by + c$$

biçiminde olan ve **doğrusal fonksiyon** adı verilen fonksiyonların özel bir durumudur.

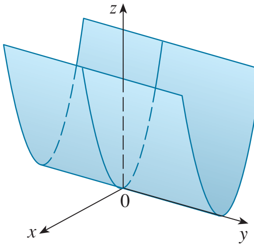
Bu fonksiyonların grafikleri $z = ax + by + c$ ya da $ax + by - z + c = 0$ ile verildikleri için birer düzlemdir.

Örnek 11

$f(x, y) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.

y ye hangi değeri verirsek verelim $f(x, y)$ nin değerinin x^2 olduğuna dikkat ediniz. Grafiği veren $z = x^2$ denklemi y yi içermemektedir. Bu, denklemi $y = k$ olan her düşey (xz-düzlemine paralel) düzlemin, grafiği, $z = x^2$ denklemi ile verilen parabol boyunca kesmesi demektir.



Şekilde grafiğin xz-düzleminde alınan $z = x^2$ parabolünün y-ekseni boyunca kaydırılarak oluşturulması gösterilmektedir.

Dolayısıyla; grafik, **parabolik silindir** adı verilen ve aynı parabolün sonsuz tane kaydırılmış kopyasından oluşan bir yüzeydir. □

Kesitlerin (**dilimlerin**) şekillerini belirleyerek başlamak genelde iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çizmeyi kolaylaştırır.

Örneğin, x i, $x = k$ (bir sabit) olarak sabitlersek ve y yi değiştirirsek sonuç tek değişkenli $z = f(x, y)$ fonksiyonudur ve grafiği $z = f(x, y)$ denklemi ile verilen yüzeyin $x = k$ düşey düzlemi ile kesişimidir.

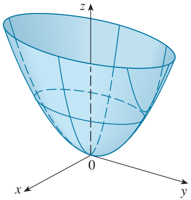
Benzer şekilde, yüzeyi $y = k$ düşey düzlemiyle dilimleyip $z = f(x, k)$ eğrilerine bakabilir ya da $z = k$ yatay düzlemleri ile dilimleyebiliriz. Tüm bu eğrilere $z = f(x, y)$ yüzeyinin **izleri** (ya da **kesitleri**) denir.

Örnek 12

İzleri kullanarak $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.

Grafiğin denklemi $z = 4x^2 + y^2$ dir. $x = 0$ alırsak $z = y^2$ çıkar. Dolayısıyla yz-düzleminin, grafikle kesişimi bir paraboldür. $x = k$ (bir sabit) alırsak $z = 4k^2 + y^2$ çıkar. Bu, grafiği yz-düzlemine paralel düzlemlerle kestiğimizde yukarıya doğru açılan paraboller elde edeceğimiz anlamına gelir. Benzer şekilde, $y = k$ alırsak $z = 4x^2 + k^2$ izleri yukarıya doğru açılan parabollerdir. $z = k$ alırsak bir elips ailesi olan $4x^2 + y^2 = k$ yatay izleri elde ederiz.



İzlerin şekillerini belirledikten sonra Şekildeki gibi grafiği çizebiliriz. Eliptik ve parabolik izlerden dolayı $z = 4x^2 + y^2$ yüzeyine **eliptik paraboloid** adı verilir. $\square$

İkinci Dereceden Yüzeyler

Tanım 13

x, y ve z değişkenleri cinsinden ikinci dereceden olan denklemlerin grafiklerine **ikinci dereceden yüzey** denir.

Örnek 14

$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ denklemi ile verilen ikinci dereceden yüzeyi çiziniz.

Çözüm.

xy-düzlemindeki $(z = 0)$ izi, $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ denklemi ile verilen elipstir. Genelde, $z = k$ düzlemindeki yatay izler

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4}, \quad z = k$$

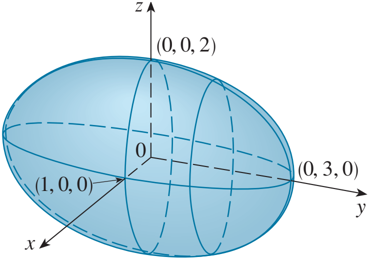
denklemi ile verilir. Bu izler, $k^2 < 4$ ya da $-2 < k < 2$ için elipstir.

Çözüm (devamı).

Benzer şekilde,

$$x = k, (-1 < k < 1) \implies \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2$$
$$y = k, (-3 < k < 3) \implies x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9}$$

düşey izleri hep elipstir.



Şekil, çizilmiş birkaç izin yüzeyin şeklini nasıl belirttiğini göstermektedir. Tüm izleri elips olduğu için bu yüzeye **elipsoid** denir. Yüzeyin koordinat düzlemlerinin her birine göre simetrik olduğuna dikkat ediniz. Bu, denklemin x, y ve z nin yalnızca çift kuvvetlerinden oluşmasının bir sonucudur.

Çözüm (devamı).

Örnekteki elipsoid, (z-ekseni gibi) bazı düşey doğruların onu birden fazla kez kestiğinden dolayı, **bir fonksiyonun grafiği değildir**. Ancak, şeklin üst ya da alt yarısı bir fonksiyonun grafiğidir. Elipsoidin denklemini z için çözersek

$$z^2 = 4\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9}\right) \qquad z = \pm 2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}}$$

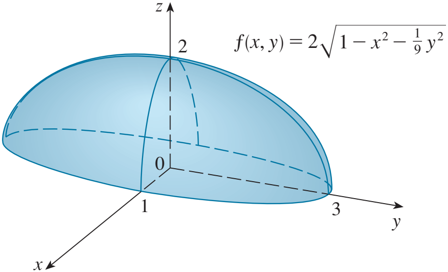
elde ederiz.

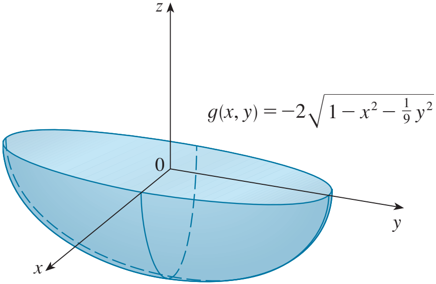
Çözüm (devamı).

Bu yüzden

$$f(x,y) = 2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}} \text{ ve } g(x,y) = -2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}}$$

fonksiyonlarının grafikleri elipsoidin üst ve alt yarısıdır.





Çözüm (devamı).

f ve g nin ikisinin de tanım kümeleri

$$1 - x^2 - \frac{y^2}{9} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan tüm (x, y) noktalarından oluşur. Başka bir deyişle,

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

elipsinin üzerinde veya içinde olan tüm noktalardan oluşur. $\square$

Bazı Standart İkinci Dereceden Yüzeyler

Standart biçimdeki altı temel ikinci dereceden yüzeyin bilgisayar tarafından çizilmiş grafiklerini görelim.

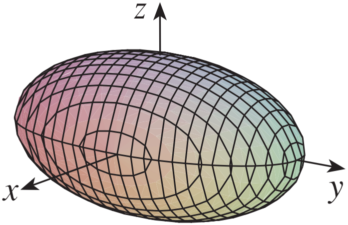
Tüm bu yüzeyler z-eksenine göre simetriktir.

Bir ikinci dereceden yüzey diğer bir eksene göre simetrik ise denklemi de ona uygun olarak değişir.

Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

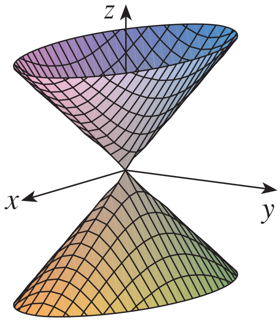
Tüm kesitler elipsdir.
Eğer $a = b = c$ ise elipsoid bir küredir.



Koni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

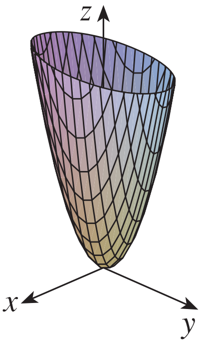
Yatay kesitler elipstir.
Düşey kesitler $x = k$ ve $y = k$ $(k \neq 0)$ hiperboldür.
$k = 0$ için ikişer adet doğrudur.



Eliptik Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

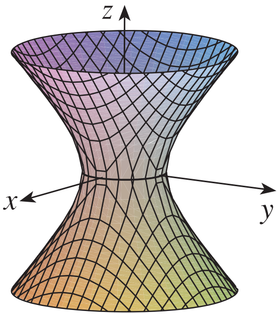
Yatay kesitler elipsdir.
Düşey kesitler paraboldür.



Tek Parçalı Hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

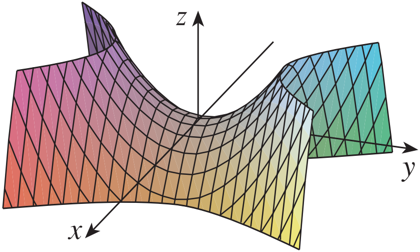
Yatay kesitler elipsdir.
Düşey kesitler hiperboldür.



Hiperbolik Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

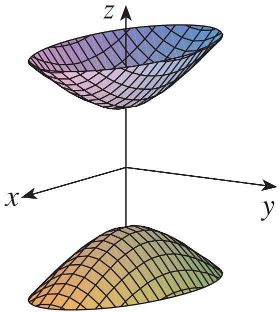
Yatay kesitler hiperboldür.
Düşey kesitler paraboldür.



İki Parçalı Hiperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$k < -c$ veya $k > c$ için yatay kesitler $(z = k)$ elipstir.
Düşey kesitler hiperboldür



Örnek 15

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$ ikinci dereceden yüzeyini sınıflandırınız.

Çözüm.

Verilen denklemi kareye tamamlayarak yeniden yazarsak

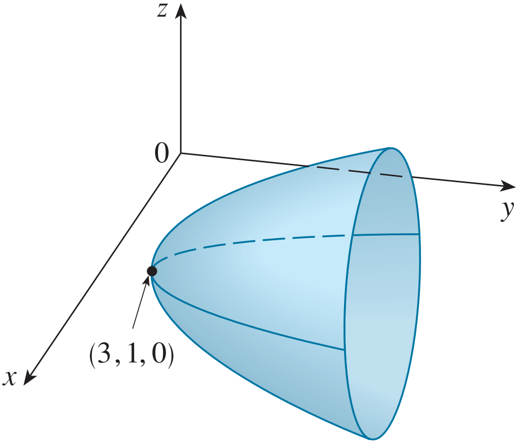
$$y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$$

elde ederiz. Bu denklemin bir eliptik paraboloid olduğunu görürüz. Ancak, paraboloidin ekseni y-eksenine paraleldir ve grafik, köşesi $(3, 1, 0)$ noktasında olacak şekilde kaydırılmıştır. $y = k$, $(k > 1)$ düzlemindeki izler

$$(x-3)^2 + 2z^2 = k - 1, \quad y = k$$

elipsleridir. xy-düzlemindeki iz ise $y = 1 + (x-3)^2$, $z = 0$ denklemleri ile verilen paraboldür.

Çözüm (devamı).



□